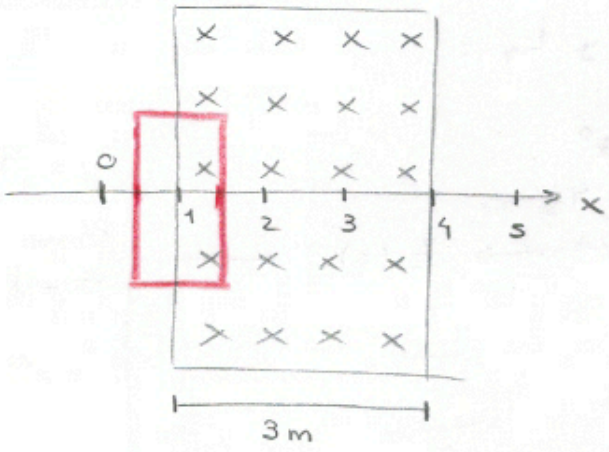
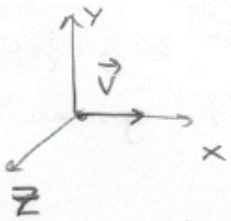
Soluciones a los problemas del tema 6

Elena del Valle Rabaul
curso 2015 - 2016

1





$\vec{B} = -B\hat{u}_z$, $B = 1T$

$\vec{v} = v\hat{u}_x$, $v = 1 m/s$

espira $\begin{cases} L_x = 1m \\ L_y = 2m \end{cases}$

a) Según la ley de Faraday-Lentz, la variación del flujo magnético $\Delta\phi_m$ a través de la espira genera una fem en ella, es decir, una corriente eléctrica. En este caso hay $\Delta\phi_m$: ① desde el momento en que la espira se adentra en la zona del espacio donde hay campo $\vec{B}$ y hasta que su área ha entrado completamente. Eso implica desde un tiempo, que definimos $\boxed{t_1 = 0}$, cuando el centro de la espira está en $x_c^1 = 0.5m$, hasta el tiempo t_2 en que el centro de la espira está en $x_c^2 = 1.5m$.

* Podemos calcular t_2 sabiendo que la espira lleva un movimiento uniforme:

$$\boxed{t_2} = t_1 + (x_c^2 - x_c^1)/v = 0 + \frac{1.5 - 0.5}{1} \boxed{= 1\,s}$$

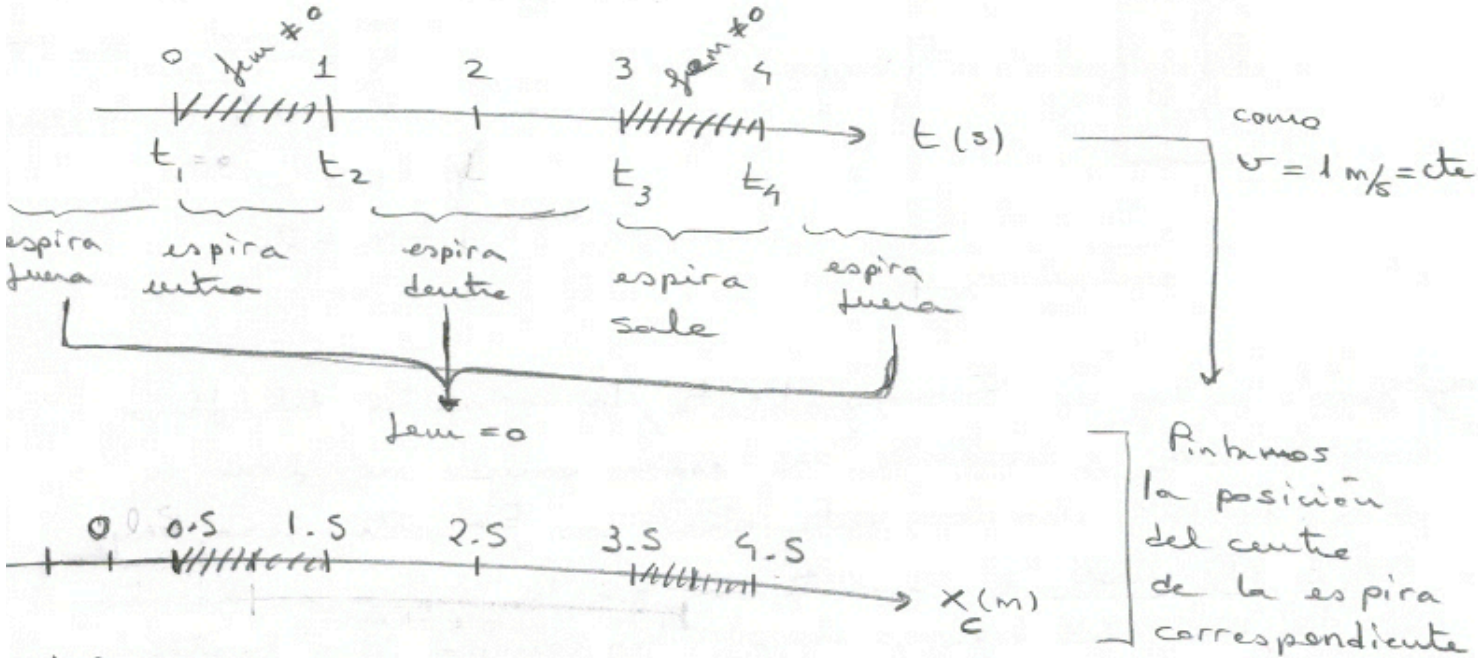
② desde que la espira empieza a salir de campo $\vec{B}$, en $x_c^3 = 3.5$, hasta que está fuera en $x_c^4 = 4.5$.

* calculamos igualmente t_3 y t_4:

$$\boxed{t_3 = t_1 + \frac{x_c^3 - x_c^1}{v} = 0 + \frac{3.5 - 0.5}{1} = 3\,s}$$

$$\boxed{t_4 = t_1 + \frac{x_c^4 - x_c^1}{v} = 0 + \frac{4.5 - 0.5}{1} = 4\,s}$$

Entonces solo hay fem $\neq 0$ en los intervalos temporales entre t_1 y t_2 y entre t_3 y t_4:



b) Calculamos la fem en estos intervalos usando:

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\oint_{\text{espira}} \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

- $\vec{B}$ y $d\vec{A}$ son siempre paralelos, en la misma dirección

$\Rightarrow \vec{B}\cdot d\vec{A} = B\cdot dA$

- $\vec{B}$ es no nulo solo en las zonas de la espira dentro de $x = 1$ y $x = 4$. Vamos a calcular el área dentro para los dos intervalos de tiempo: ① $t_1 < t < t_2$
② $t_3 < t < t_4$

$\Rightarrow \oint_{\text{espira}} B\cdot dA = B\int_{\substack{\text{espira}\\ \text{dentro}}} dA = B\,A_d$, con A_d variando con t.
$\hookrightarrow A_d(t)$ //

① $A_d^{①}(t) = L_x^{dentro} \cdot L_y = v \cdot t \cdot L_y$

$$L_x^{dentro} = v \cdot (t - t_1) = vt$$

$$fem_1 = -\frac{d}{dt} B A_d^{①}(t) = -B \frac{d}{dt}(v \cdot t \cdot L_y) = -Bv L_y \underbrace{\frac{dt}{dt}}_{1}$$

$$\boxed{fem_1 = -Bv L_y = -1 \cdot 1 \cdot 2 = -2v}$$

La fem_1 induce una corriente cuyo sentido es tal que debe generar un campo $\vec{B}_{ind}$ que se oponga al externo $\vec{B}$, para compensar el aumento de flujo magnético (Lentz): por la regla de la mano derecha, para tener $\vec{B}_{ind} = B_{ind} \cdot \hat{u}_z$ necesitamos I_{ind} que fluya



② $A_d^{②}(t) = A_T - L_x^{fuera} L_y$ (igual para ahora disminuye desde el área total A_T)

$A_d^{②}(t) = L_x L_y - v(t - t_3) L_y$

$L_x^{fuera} = v(t - t_3)$

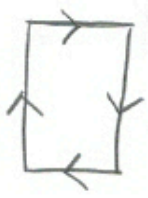
$$A_d^{②}(t) = L_x L_y + v L_y t_3 - v L_y t$$

$$fem_2 = -\frac{d}{dt} B A_d^{②}(t) = -B \frac{d}{dt}\left[L_x L_y + v L_y t_3 - v L_y t\right]$$

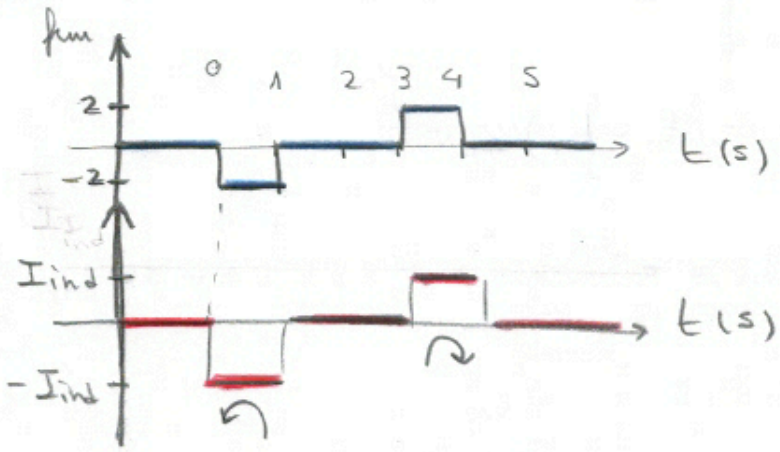
$$= +Bv L_y \underbrace{\frac{d}{dt} t}_{1} = +Bv L_y$$

$$\boxed{fem_2 = Bv L_y = 2v}$$

La I_{ind} es la contraria ya que ahora debe crear un $\vec{B}_{ind}$ en el mismo sentido que $\vec{B}$, cuyo flujo está ahora disminuyendo.



Pintándolo:

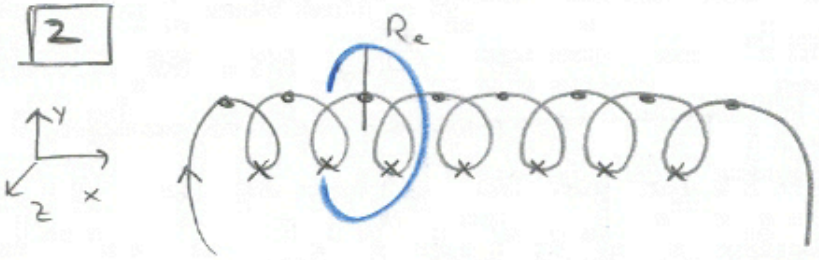


c) fem_{ind} y $I_{ind} = 0$ si la velocidad es vertical porque entonces nunca hay un cambio del flujo, da igual desde qué posición.

$$I_{ind} = \frac{fem}{R}$$

R = resistencia en la espira

2



$R_b = 10/\pi$ cm

$n = 10^4$ espiras/cm } bobina

$I = I_0 \cos \omega t$

$I_0 = 2.4$ A

$\omega = \pi\ s^{-1}$

espira { $R_e = 10$ cm $= 0.1$ m; $d = 1$ mm $= 0.001$ m; $\rho = 10^{-7}\ \Omega$ m

a) El campo en una bobina viene dado por

$$B_b = \mu_0 I n = \mu_0 I_0 n \cos \omega t$$

en dirección $\vec{B} = B_d \hat{u}_x$ en este caso.

El valor máximo es, por tanto $\mu_0 I_0 n = 3\ T = B_b^{max}$

$n = 10^6$ espiras/m

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A

b) Al tener corriente que varía con el tiempo la bobina, el campo magnético que genera B_b también varía con el tiempo. Esto resulta en un flujo magnético variable a través de la espira. Por la ley de Faraday-Lenz:

$$fem = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint_{espira} \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \oint_{espira} B \cdot dA$$

$\vec{B}_b$ y $d\vec{A}$ son paralelos en la posición a

B es uniforme dentro de la bobina, $B = B_b$, aproximadamente (e eso asumimos), y $B = 0$ fuera:

$$fem = -\frac{d}{dt} B_b(t) \cdot \underbrace{\oint_{bobina} dA}_{} = +\mu_0 I_0 n \pi R_b^2 w \sin wt$$

!! Área donde hay flujo ⇒ Área de la bobina $= \pi R_b^2$

$$\boxed{(fem)_{max} = \mu_0 I_0 n \pi R_b^2 w = B_b^{max} \cdot \pi R_b^2 w = 0{,}03\ V}$$

c) Siguiendo la ley de Ohm, la corriente inducida en la espira es:

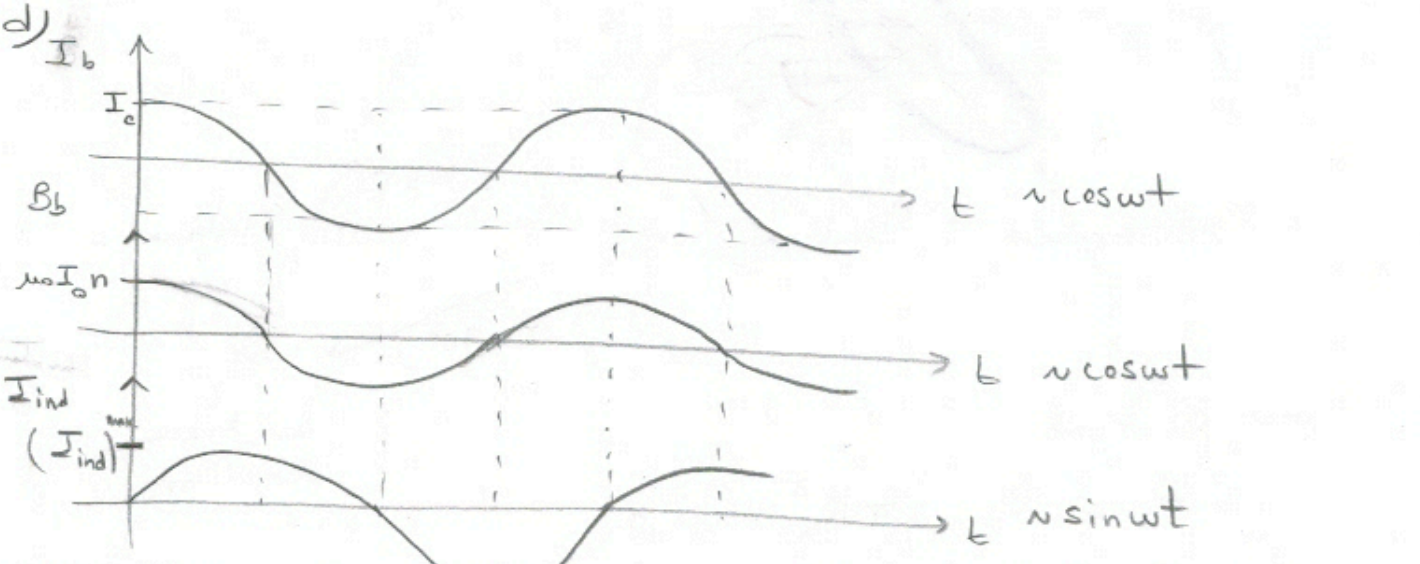
$$\boxed{(I_{ind})_{max} = \frac{(fem)_{max}}{R} = \frac{(fem)_{max}}{\rho \cdot 2\pi R_e} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0{,}37\ A}$$

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

con: ρ = resistividad, l = longitud hilo $= 2\pi R_e$, A = área de la sección $= \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$

Tanto la fem como la I inducidas oscilan con estas amplitudes a la misma frecuencia que la corriente de la bobina, $w = \pi\ s^{-1}$.

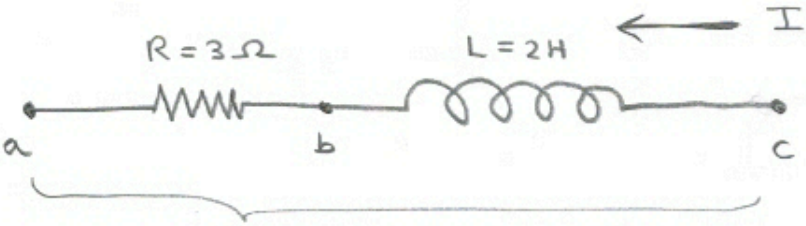
d)



e) la I_{ind} en la espira genera un B_{ind}, según la fórmula para una espira:

$$\boxed{(B^{ind}_{espira})^{max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi (I_{ind})^{max}}{R_e} = 2 \times 10^{-6}\ T}$$

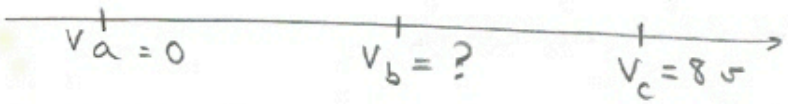
3



$$V_{ca} = V_c - V_a = +8\,V$$

$$\left|\frac{dI}{dt}\right| = 5\ A/s$$

Dibujamos los valores del potencial tomando como cero el punto "a":



Para saber la corriente que pasa por la resistencia necesitamos saber V_b y aplicar la ley de Ohm:

$$I = \frac{V_b - V_a}{R}$$

En la bobina se aplica la ley de Faraday con su autoinducción:

$$|\Delta V_L| = L\left|\frac{dI}{dt}\right| = 2 \times 5 = 10\,V$$

Lo que no sabemos es si el signo de ΔV_L es positivo o negativo (solo nos dan la variación de I en valor absoluto). Consideramos las dos posibilidades:

① Si $\Delta V_L = V_c - V_b < 0 \Rightarrow V_b = V_c - |\Delta V_L| = 8 - 10 = -2\,V$

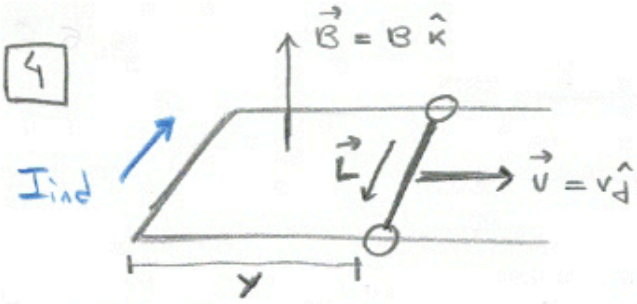
en este caso $V_b < V_a$ y la corriente fluiría en sentido de a → b ⇒ No puede ser este signo

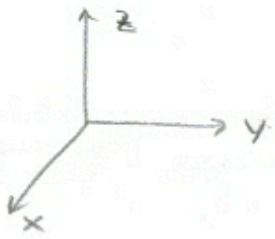
② Si $\Delta V_L = V_c - V_b > 0 \Rightarrow \boxed{V_b = V_c + |\Delta V_L| = 18\,V}$

Ahora la corriente sí fluye de b hacia a, como nos indica el enunciado. ⇒ Este es el signo correcto!

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{18 - 0}{3} = 6\ A}$$

4





- Mientras la barra se mueva ($v \neq 0$), se crea una corriente inducida en ella I_{ind} que genera un $\vec{B}_{ind}$ opuesto a la variación del flujo magnético del campo externo $\vec{B}$.
Es decir $\vec{B}_{ind} = B_{ind}(-\hat{k})$, ya que Φ_m aumenta con el tiempo, y el sentido de I_{ind} es ↻.

- Calculamos I_{ind} : como vimos en clase

$$\Phi_m = \oint_{espira} \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \oint A = BLy$$

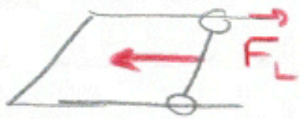
$$\frac{d\Phi_m}{dt} = BL\frac{dy}{dt} = BLv = -fem_{ind} \Rightarrow I_{ind} = \frac{|fem|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

- La fuerza de Lorentz que $\vec{B}$ crea sobre la barra debida a I_{ind} :

$$\vec{F}_L = I_{ind}\,\vec{L} \times \vec{B} = I_{ind}\,L\,B\,\hat{\imath}\times\hat{k} = \frac{BLv}{R}LB(-\hat{\jmath})$$

$\vec{L} = L\hat{\imath}$

(como también vimos en clase)



Esta fuerza frena el movimiento de la barra ya que se opone a la velocidad. Para tener una v = cte tiene que ser compensada exactamente por un agente externo. En $t=0$ el agente externo desaparece y la $\vec{F}_L$ sirve para parar la barra produciendo un movimiento decelerado.

- Aplicamos la 2ª ley de Newton para resolver el movimiento de la barra :

$$m a_y = m\frac{dv}{dt} = F_L = -\frac{B^2L^2}{R}v$$

$$a_y = -\frac{B^2 L^2}{Rm} v$$

Al ser una aceleración que depende de la velocidad, irá disminuyendo con el tiempo. El movimiento no será algo sencillo como un movimiento uniformente de-celerado. Hay que resolverlo!

- La ecuación del movimiento es, entonces:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 L^2}{Rm} v \qquad \text{con} \quad v(t=0) = v_0$$

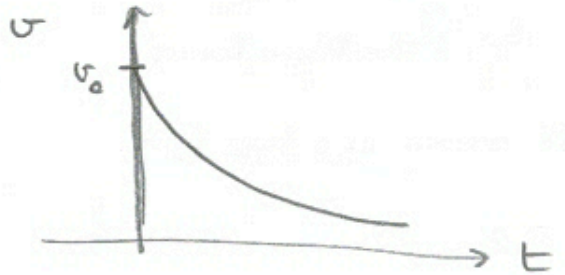
Integramos recolocando los diferenciales:

$$\int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 L^2}{Rm} \int_0^t dt$$

$$Ln\, v \Big]_{v_0}^{v_f} = \underbrace{Ln\, v_f - Ln\, v_0}_{Ln\left(\frac{v_f}{v_0}\right)} = -\frac{B^2 L^2}{Rm} t$$

$$\Rightarrow \frac{v_f}{v_0} = e^{-B^2L^2/Rm \cdot t} \Rightarrow \boxed{v_f = v_0\, e^{-t/\tau}}$$

con $\boxed{\tau = \frac{Rm}{B^2 L^2}}$



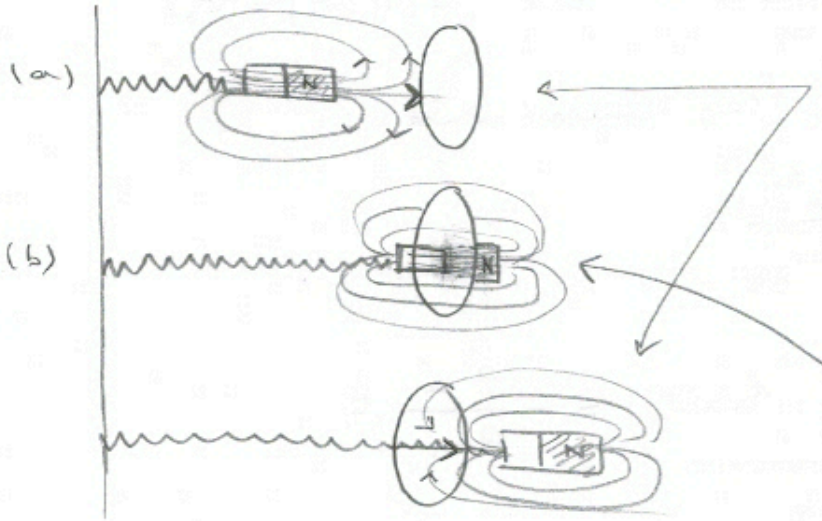
La velocidad sufre un decaimiento exponencial.

5

El movimiento del muelle es m.a.s. así que:

$x = x_0 \cos \omega t$, $x_0 = x(t=0)$ condición inicial del dibujo.

El flujo magnético Φ_m varía también de forma periódica. Podemos ver cuándo tendrá máximos y mínimos dibujando las líneas de fuerza del campo magnético respecto a la espira.



en ambos casos el imán está lo más alejado de toda su trayectoria $\Rightarrow \Phi_M$ mínimo

en la posición de equilibrio el imán está lo más cercano posible a la espira $\Rightarrow$ B es máximo $\Rightarrow \Phi_M$ máximo

La corriente inducida es proporcional a la fem inducida: $I_{ind} \sim \frac{fem_{ind}}{R} = \frac{-1}{R} \frac{d\Phi_M}{dt}$

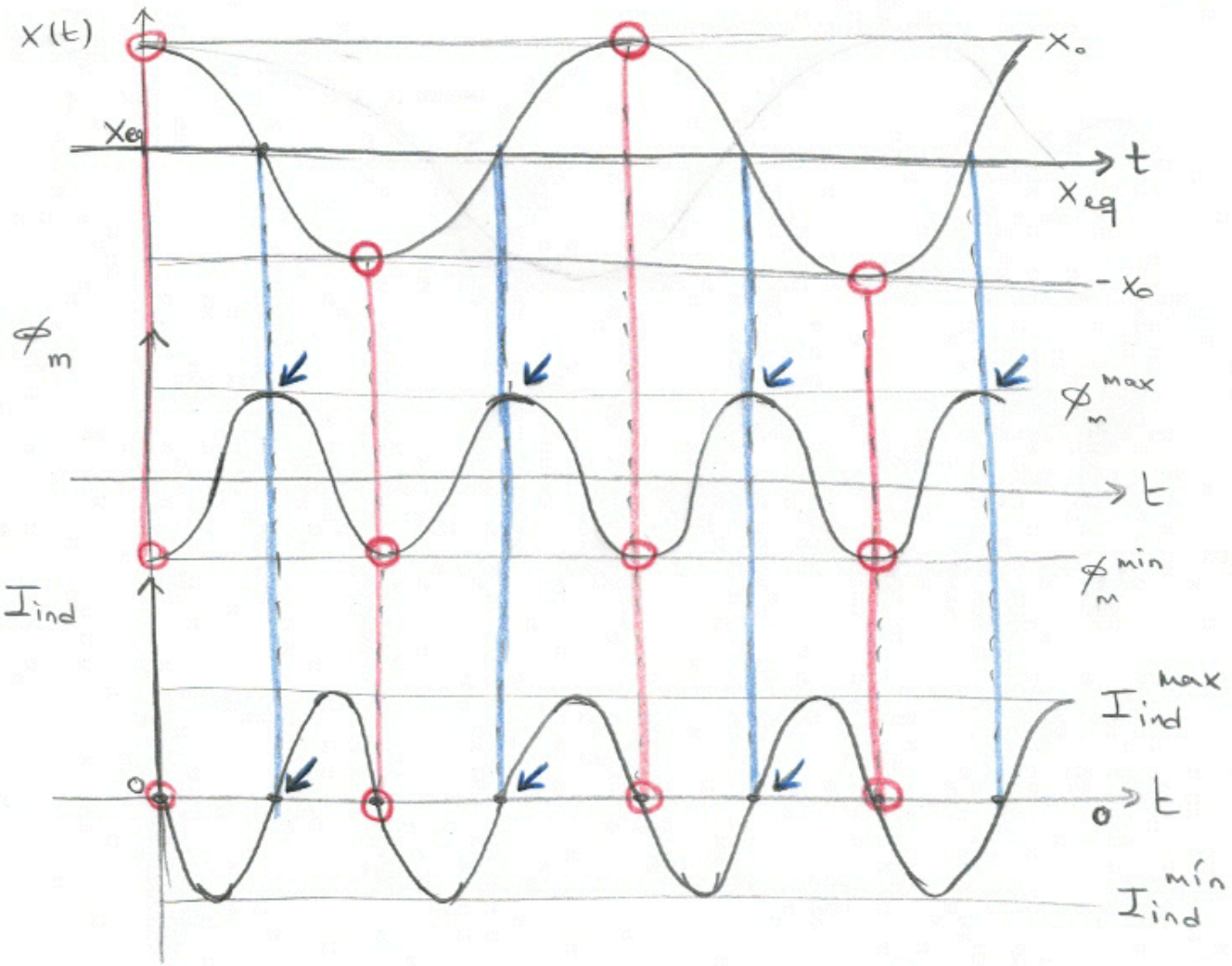
ley Faraday-Lenz

Así que es proporcional a la derivada del flujo (con el signo cambiado)

$\Rightarrow$ Si Φ_M es $\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases} \Rightarrow I_{ind} = 0$

Si Φ_m tiene máxima pendiente $\begin{cases} \text{creciente} \Rightarrow I_{ind} \text{ mínima} \\ \text{decreciente} \Rightarrow I_{ind} \text{ máxima} \end{cases}$

Con esto podemos reconstruir un dibujo aproximado de las gráficas en función del tiempo.



↙ = el muelle pasa por la posición de equilibrio (atravesado el imán en la espira)

$x = x_{eq}$, $\Phi_m = \Phi_m^{máx}$, $I_{ind} = 0$

○ = el muelle está máximamente elongado (el imán lo más lejos posible de la espira)

$x = x_0$, $\Phi_m = \Phi_m^{mín}$, $I_{ind} = 0$