Solución a los problemas del tema 1

Elena del Valle Reboul
curso 2015-2016

(1) Energía total de un muelle sin pérdidas:

$$E_T = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial elástica}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

usamos las expresiones del m.a.s. generales:

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \end{cases}$$

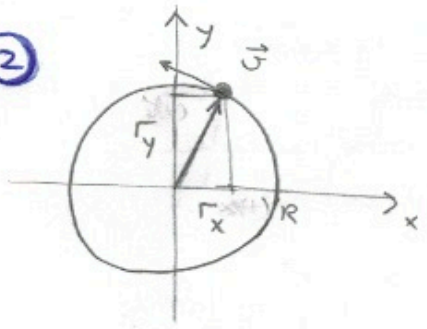
$$E_T = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \underbrace{\left[\cos^2(\omega_0 t + \phi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \phi_0)\right]}_{=1} = \frac{1}{2} k A^2$$

¡demostrado!

(2)



- movimiento circular uniforme $\begin{cases} v \\ R \end{cases}$

$$\begin{cases} |\vec{v}| = v = \text{velocidad lineal} = R\alpha, & \alpha = \text{velocidad angular} \\ |\vec{a}| = a = -\alpha^2 R = \text{aceleración centrípeta (hacia el centro)} \end{cases}$$

- El vector desplazamiento $\vec{r}$, separado en componentes:

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} = \underbrace{R\cos\alpha t}\, \hat{i} + \underbrace{R \sin \alpha t}\, \hat{j}$$

$\Rightarrow$ ambas componentes siguen un m.a.s.

- Veamos la fuerza que actúa sobre la componente x:

$$a_x = \frac{d^2 r_x}{dt} = -R\alpha^2 \cos\alpha t = -\alpha^2 r_x$$

La fuerza elástica en este caso es:

$$F_x = m a_x = \underbrace{-m\alpha^2}_{\equiv K} r_x \longrightarrow$$

se opone al movimiento con una constante de proporcionalidad. Tiene la forma $\sim -Kx$

La constante elástica es $\boxed{k = m\alpha^2}$

Su ecuación del movimiento se escribirá:

(2ª ley Newton) $$m\frac{d^2 r_x}{dt^2} = F_x = -K r_x$$

$$m\frac{d^2 r_x}{dt^2} + m\alpha^2 r_x = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 r_x}{dt^2} + \alpha^2 r_x = 0}$$

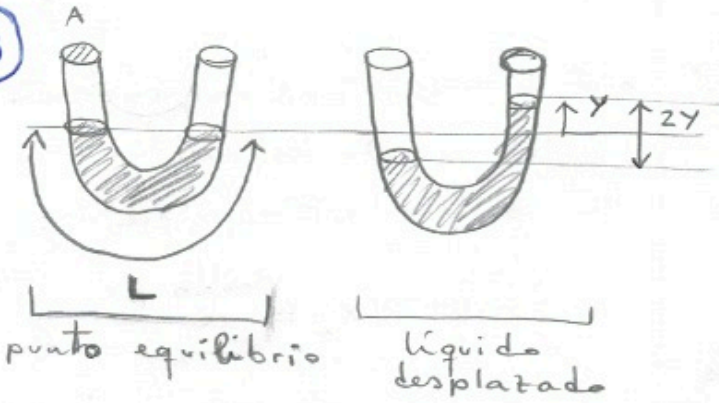
La cantidad importante que nos queda obtener es la frecuencia angular de este m.a.s.:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{m\alpha^2}{m}} = \alpha}$$

la misma que la del mvto circular uniforme !!

$\Rightarrow$ El movimiento circular uniforme proyectado sobre los ejes produce un m.a.s. Esto se llama la <u>representación de Fresnel</u>.

3



y = desplazamiento inicial del líquido

$2y$ = columna de líquido

ρ = densidad del líquido

L = longitud que ocupa

A = área del tubo

- Qué fuerza va a producir la oscilación alrededor del punto de equilibrio?
  el peso de la columna de líquido desplazada
  ⇒ la fuerza de la gravedad

$$|F| = m_d g \longrightarrow \text{con } m_d = \text{masa de agua desplazada} = \underbrace{2y \cdot A}_{\text{volumen desplazado}} \cdot \rho$$

- Cuál es la masa del objeto que oscila? Va a oscilar no solo la columna de líquido desplazada sino toda la masa de líquido:

$$m_T = \underbrace{L \cdot A}_{\text{volumen total}} \cdot \rho$$

- Con esto ya podemos escribir la ecuación del movimiento del líquido, 2ª ley de Newton:

$$m_T \frac{d^2y}{dt^2} = -|F| = -2A\rho g \cdot y \equiv -Ky \Rightarrow \boxed{K = 2A\rho g}$$

efectivamente la fuerza es proporcional al desplazamiento y restauradora

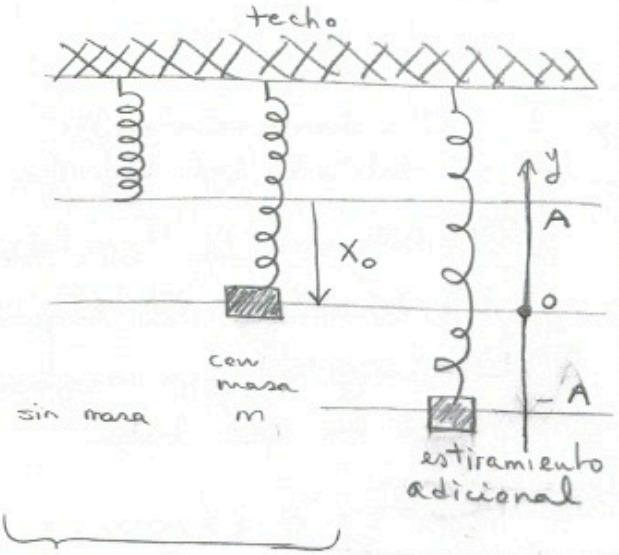
dará lugar a un m.a.s. con ecuación (que simplificamos un poco):

$$LA\rho \frac{d^2y}{dt^2} = -2A\rho g y \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dt} + \frac{2g}{L} y = 0}$$

- Su período:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_T}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}} \quad \text{demostrado! (e.q.d.)}$$

4



posiciones de equilibrio

$m = 0.1\ kg$
$x_0 = 0.1\ m$
$A = 0.06\ m$

- 1º determinamos la constante K del muelle a partir del primer estiramiento:

$$|F| = K x_0 = \begin{matrix}\text{peso}\\ \text{de}\\ \text{masa}\end{matrix} = mg$$

$$K = \frac{mg}{x_0} = \frac{0.1 \times 9.8}{0.1\ m} = 9.8\ N/m$$

Al poner la masa, el muelle se coloca en una nueva posición de equilibrio (no oscila!)

- Al estirar aún más el muelle, sin añadir más masa, sí que conseguimos que el muelle oscile desde el máximo desplazamiento y se produzca un m.a.s.:

$$y(t) = -A\cos(\omega_0 t) \quad \text{en } t>0 \quad \text{con} \begin{cases} A = 0.06\ m \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.1}} = 9.9\ Hz \end{cases}$$

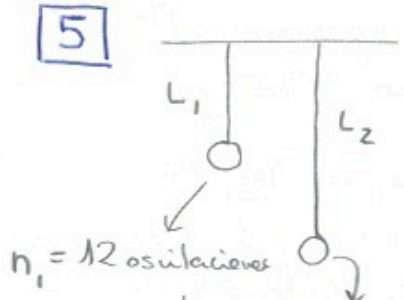
- La energía cinética en los extremos del desplazamiento ($y = \pm A$) se anula porque $v = 0$. Es máxima al pasar por el punto de equilibrio, $y = 0$, donde la que se anula es la energía potencial elástica, E_p. Dado que la energía total $E_T = E_p + E_c = \frac{1}{2}kA^2$ es constante $\Longrightarrow$ la energía cinética en $y = 0$ es igual a la energía total:

$$E_c^{max} = E_T = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}9.8 \cdot 0.06^2 = 0.0176\ J, \text{ en } y = 0$$

- Aquí la masa viaja a la máxima velocidad:

$$E_c^{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \longrightarrow v_{max} = A\sqrt{\frac{K}{m}} = 0.59\ m/s$$

5



$L_1 = 1\,m$
$L_2 = ?$

Usamos la expresión de la frecuencia angular del péndulo en función de su longitud:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L_1}}\,, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L_2}}$$

$$\omega = \frac{\text{nº oscilaciones}}{\text{tiempo}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{n_1}{T} \\ \omega_2 = \dfrac{n_2}{T} \end{cases}$$

Y también usamos la expresión de la frecuencia en función del nº de oscilaciones por unidad de tiempo

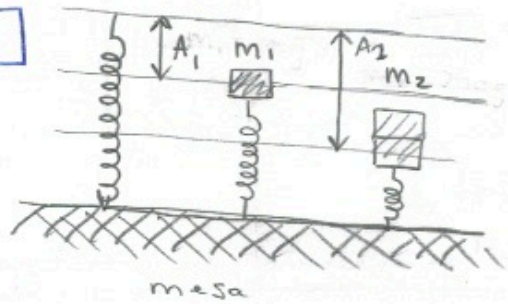
$\Rightarrow$ Las ponemos juntas:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{n_1}{T} = \sqrt{\frac{g}{L_1}} \\ \omega_2 &= \frac{n_2}{T} = \sqrt{\frac{g}{L_2}} \end{aligned}\right\} \quad T = n_1\sqrt{\frac{L_1}{g}} = n_2\sqrt{\frac{L_2}{g}}$$

$$L_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 L_1 = \left(\frac{12}{11}\right)^2 1 = 1.19\,m$$

El 2º péndulo es algo más largo, por eso oscila más lentamente.

6



$m_1 = 0.1\,kg$ $\quad A_1 = 0.0981\,m$

$m_2 = 0.2\,kg$ $\quad A_2 = ?$

$K = ?$

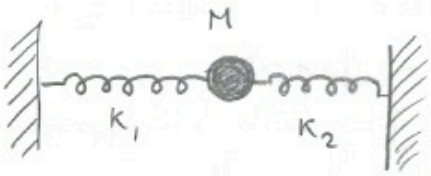
El muelle adquiere 3 posiciones de equilibrio distintas, dependiendo de la masa que sostiene. Pero su constante elástica K es siempre la misma. Como en el problema 4, la fuerza que desplaza la masa es la gravedad, en ambos casos:

$$\left.\begin{aligned} |F_1| &= K A_1 = m_1 g \\ |F_2| &= K A_2 = m_2 g \end{aligned}\right\} \quad K = \frac{m_1 g}{A_1} = \frac{m_2 g}{A_2}$$

$$K = \frac{m_1 g}{A_1} = \frac{0.1 \cdot 9.81}{0.0981} = 10\,N/m$$

$$A_2 = \frac{m_2}{m_1} A_1 = \frac{0.2}{0.1}\,0.0981 = 0.196\,m$$

7



$\begin{cases} x_1 = \text{posición equilibrio muelle 1} \\ x_2 = \text{idem del muelle 2} \end{cases}$

- Si estuviera solo el muelle $\begin{cases} 1 \Rightarrow F_1 = -K_1 (x - x_1) \\ 2 \Rightarrow F_2 = -K_2 (x - x_2) \end{cases}$

- Al ponerlos juntos, ambas fuerzas actúan sumadas sobre la masa:

$$F_T = F_1 + F_2 = -K_1 (x - x_1) - K_2 (x - x_2)$$

- Vamos a escribirlo como una nueva constante del muelle total K_T y una nueva posición de equilibrio x_0:

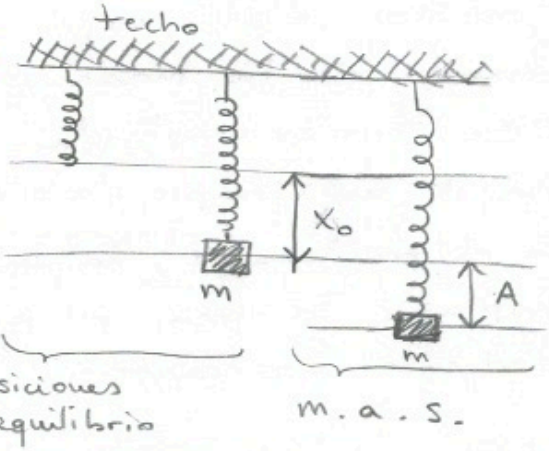
$$F_T = -K_T (x - x_0) = -K_T x + K_T x_0$$

$$F_1 + F_2 = -(K_1 + K_2) x + K_1 x_1 + K_2 x_2$$

- por comparación $\begin{cases} \boxed{K_T = K_1 + K_2} \\ \boxed{x_0 = \dfrac{K_1 x_1 + K_2 x_2}{K_T} = \dfrac{K_1 x_1 + K_2 x_2}{K_1 + K_2}} \end{cases}$

- El nuevo periodo es $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\dfrac{M}{K_T}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{M}{K_1 + K_2}}}$

8



$\begin{cases} x_0 = 0.098\ m \\ \gamma = 4.4\ s^{-1} \text{ coeficiente de amortiguam.} \end{cases}$

- Como en los problemas 4 y 6, obtenemos K de la nueva posición de equilibrio:

$$|F| = mg = +K x_0 \rightarrow K = \frac{mg}{x_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}} = \text{frecuencia natural}$$

- Usamos las fórmulas del m.a.s. amortiguado para obtener T:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/x_0 - \gamma^2}} = 0.7\ s}$$